

Folgenentropie für abelsche Gruppen von Automorphismen

von
Eugen Krug
aus
Nürnberg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548408_0034

Folgenentropie für abelsche Gruppen von Automorphismen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Eugen Krug
aus
Nürnberg

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Folgentropie für abelsche Gruppen
von Automorphismen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorlegt

von

Tag der mündlichen Prüfung: 16.5.1973

Dekan: Prof. Dr. W. Heumann

Erstberichterstatte: Prof. Dr. K. Jacobs

Zweiterberichterstatte: Prof. Dr. H. Bauer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	S. 1
§1. Grundlegende Definitionen	S. 3
§2. Definition der Folgenentropie und erste Aussagen	S. 8
§3. Berechnung der Folgenentropie	S.13
§4. Entropie und Folgenentropie	S.26
Literaturverzeichnis	S.38

Einleitung:

Manche Begriffe haben während ihrer "wissenschaftlichen Laufbahn" einen Bedeutungswandel durchgemacht. Ein in dieser Beziehung besonders schillernder Begriff ist die Entropie. Zunächst ausschließlich in der Physik verwendet, hat sie auch in der Mathematik einen festen Platz errungen. Man braucht nur an ihre Bedeutung in der Informationstheorie zu denken oder aber in jüngerer Zeit an die Ergodentheorie.

Hier hat Kolmogoroff die Entropie als neue Invariante in die Diskussion der Isomorphie dynamischer Systeme eingeführt. Mit ihrer Hilfe wies er zum Beispiel nach, daß Bernoullischemata, die alle vom gleichen Spektraltyp sind, nicht auch stets isomorph zu sein brauchen, daß es sogar zu allen positiven reellen Zahlen ein Bernoulli Schema gibt, das diesen Entropiewert besitzt. Für diese Systeme konnte dann aber 1969 Ornstein [12] beweisen, daß die Entropie eine vollständige Invariante ist, also gleiche Entropiewerte auch Isomorphie der Bernoulli Schemata nach sich ziehen. Damit hatte sich die Bedeutung der Entropie für die Ergodentheorie endgültig erwiesen.

In der Folge konnten noch für größere Klassen dynamischer Systeme solche Isomorphieaussagen bewiesen werden (zum Beispiel durch Katznelson [6], McCabe-Shields [10]). Ornstein [13] zeigte jedoch selbst, daß für K-Systeme eine entsprechende Aussage nicht gelten kann. Man ist also darauf angewiesen, neue Invariante, die möglicherweise die Entropie mit einschließen, zu finden.

Einen Vorschlag in dieser Richtung machte bereits 1967 Kushnirenko [9], der zur Untersuchung von Bewegungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten den Begriff der Folgenentropie einführte. Für Systeme mit positiver Entropie bringt die Folgenentropie jedoch keine grundsätzlich neue Information. In diesem Fall läßt sie sich nämlich, wie in [7] gezeigt wird, für jede Folge durch einen vom System unabhängigen Faktor aus der Entropie berechnen.

Nachdem einige Autoren, angeregt durch die statistische Mechanik, abelsche Gruppen von Automorphismen untersucht hatten, erweiterte Conze [3] 1972 den Entropiebegriff auf diese Systeme. Es liegt daher nahe, auch Folgenentropie auf Gruppen von Automorphismen zu definieren und zu untersuchen, ob auch hier wieder obige Beziehung zwischen Entropie und Folgenentropie besteht. Wir werden dies in der vorliegenden Arbeit für aperiodische Gruppen zeigen können.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn Professor Konrad Jacobs für seine tatkräftige Unterstützung verpflichtet, Er stellte mir laufend neueste Veröffentlichungen in großzügiger Weise zur Verfügung, durch die diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht wurde. Darüberhinaus zeigte er sich meinen Anliegen gegenüber stets verständnisvoll und förderte mich durch sein fachkundiges Urteil.

§ 1 Grundlegende Definitionen

Diese Arbeit wird sich ausschließlich mit Automorphismen T eines Lebesgueschen Wahrscheinlichkeitsraumes $(X, \mathfrak{F}, m)$ beschäftigen, das heißt mit meßbaren Abbildungen $T: X \rightarrow X$ mit der zusätzlichen Eigenschaft der Maßtreue: $m(T^{-1}A) = m(A)$ für alle $A \in \mathfrak{F}$. Wir wollen uns dabei mit der Entropie für abelsche Gruppen solcher Automorphismen und einer Verallgemeinerung hiervon, der Folgenentropie, befassen. Daher sei zunächst an einige Definitionen und Eigenschaften der Entropie und einiger damit zusammenhängender Begriffe erinnert.

Seien $P, Q, R, \dots$ meßbare Zerlegungen von X , ϵ die Zerlegung in die Punkte von X . Zwei solche Zerlegungen sollen gleich heißen, falls sie außerhalb einer Menge vom Maß Null übereinstimmen. Ist eine der beiden Zerlegungen feiner als die andere (bei höchstens abzählbaren Zerlegungen $P = \{P_1, \dots\}$, $Q = \{Q_1, \dots\}$ bedeutet dies: $P_i = \bigcup_{j \in J_i} Q_j \text{ mod } m \quad \forall P_i \in P$), dann schreibt man $P \leq Q$. Diese Aussage ist gleichbedeutend damit, daß die gemeinsame Verfeinerung von P und Q (in Zeichen: $P \vee Q$) gleich Q ist. Sei nun Z' die Menge aller solcher Zerlegungen mit höchstens abzählbar vielen Elementen, so können wir die Entropie von $P \in Z'$ definieren durch:

$$H(P) = - \sum_i m(P_i) \log m(P_i)$$

Z sei dann die Menge aller $P \in Z'$ mit $H(P) < \infty$.

Darüber hinaus ist für $P \in Z$ und Q meßbar die bedingte Entropie durch

$$H(P/Q) = - \sum_i \int_{P_i} \log E(1_{P_i}/Q) \, dm$$

definiert, wobei $E(1_{P_i}/Q)$ die bedingte Erwartung der Indikatorfunktion von P_i unter der von Q aufgespannten σ -Algebra bedeute. Damit ist

$H(P/Q) = 0$ gleichbedeutend mit $P \leq Q$. Ferner ist $H(P/Q)$ monoton wachsend in P und monoton fallend in Q .

Einige Rechenregeln:

Seien $P, R \in Z$; Q beliebige Zerlegung, dann gilt:

$$H(P \vee R / Q) = H(P/Q) + H(R/P \vee Q)$$

Insbesondere wegen obiger Bemerkung also:

$$H(P \vee R / Q) \leq H(P/Q) + H(R/Q)$$

Sei $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit

$Q_n \leq Q_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $Q = \bigvee_{n=1}^{\infty} Q_n$ ihre gemeinsame Verfeinerung, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(P/Q_n) = H(P/Q)$$

Mit diesen Regeln kann man beweisen, daß

$$d(P, R) = H(P/R) + H(R/P)$$

für $P, R \in Z$ eine Metrik auf Z ist, bezüglich der dieser Raum sogar vollständig ist.

Um das Konzept der Entropie auch auf Automorphismen und schließlich auf Gruppen von Automorphismen ausdehnen zu können, benötigen wir noch einige Definitionen und Schreibweisen.

Sei T ein Automorphismus von $(X, \mathcal{E}, m)$. Für jede Zerlegung $P \in Z$ definieren wir:

$$h(P, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i P\right)$$

(der Limes existiert stets) und für eine Folge $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}$:

$$h_A(P, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=1}^n T^i P\right)$$

und bezeichnen diese Ausdrücke als Entropie bzw. Folgenentropie (bezüglich der Folge A) der Zerlegung P unter dem Automorphismus T . (Die Folgenentropie ist offensichtlich eine Verallgemeinerung der Entropie, denn für $A = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir diese als Spezialfall zurück.)

Wegen der entsprechenden Ungleichung für Zerlegungen erhalten wir auch hierfür:

$$h(P, T) \leq h(R, T); \quad h_A(P, T) \leq h_A(R, T)$$

falls $P, R \in \mathbb{Z}$, $P \leq R$

Isomorphieinvarianten des Systems $(X, \mathcal{B}, m, T)$ sind schließlich folgende Ausdrücke:

$$h(T) = \sup_{P \in \mathbb{Z}} h(P, T) \text{ und}$$

$$h_A(T) = \sup_{P \in \mathbb{Z}} h_A(P, T)$$

Diese Begriffe sollen nun auf abelsche Gruppen von Automorphismen mit endlich vielen Erzeugern erweitert werden. Dabei soll im folgenden stets die Gruppe G und die Zahl der erzeugenden Automorphismen T_i (nicht notwendigerweise die Minimalzahl) als ein mathematisches Gebilde betrachtet werden. Wenn dieses Erzeugendensystem den Umfang m hat, so werden sich unsere Überlegungen zum Teil auf Teilmengen des $\mathbb{Z}^m$ erstrecken. Darum führen wir zunächst einige Schreibweisen ein, die wir von Conze [3] übernehmen. Wir werden

stets jeden Punkt $i \in \mathbb{Z}^m$ die Koordinaten i^j ($1 \leq j \leq m$) zuordnen, also $i = (i^1, \dots, i^m)$. Ist M eine Teilmenge des $\mathbb{Z}^m$ und P eine meßbare Zerlegung, dann bezeichnen wir mit P_M die Zerlegung

$\bigvee_{i \in M} T_1^{i^1+1} \dots T_m^{i^m} P$. Dies ist eine Erweiterung der Schreibweise

$$P_T = \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} T^i P \text{ und}$$

$$P_T^- = \bigvee_{i=-1}^{-\infty} T^i P$$

die wir in dieser Arbeit ebenfalls verwenden werden. Für $M = \mathbb{Z}^m$ schreiben wir auch $P_M = P_G$.

Ferner werden wir uns für die Anzahl der Elemente in einer solchen Teilmenge M des $\mathbb{Z}^m$ interessieren und bezeichnen sie mit $s(M)$.

Mit diesen Begriffen können wir nun die Definition der Entropie eines Systems $(X, \mathcal{G}, m, G)$ aufschreiben, wobei G eine abelsche Gruppe mit einem fest gegebenen Erzeugendensystem von m Automorphismen sei. Wir werden uns dabei auf einen Spezialfall der bei Conze [3] angegebenen Definition beschränken. Es wird dort nämlich nachgewiesen, daß die Entropie von der Folge der Parallelogramme des $\mathbb{Z}^m$, durch die sie definiert wird, unabhängig ist, wenn nur jede Dimension dieser Parallelogramme gegen unendlich strebt. Wir wählen daher die spezielle Folge K_n der Kuben in $\mathbb{Z}^m$ mit Kantenlänge n , d.h.:

$$K_n = \{k \in \mathbb{Z}^m / 0 \leq k^i \leq n-1, 1 \leq i \leq m\}$$

und definieren für $P \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} h(P, G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s(K_n)} H(P_{K_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} H \left(\bigvee_{i^1=0}^{n-1} \dots \bigvee_{i^m=0}^{n-1} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P \right) \end{aligned}$$

Als Entropie des Systems $(X, \mathcal{L}, m, G)$ erhalten wir dann:

$$h(G) = \sup_{P \in \mathcal{Z}} h(P, G)$$

Im Spezialfall einer aperiodischen Gruppe G mit m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$, das heißt einer Gruppe bei der $m \{x/T_1^{i_1}, \dots, T_m^{i_m} x = x\} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}^m$ gilt, gibt der Satz von Rochlin eine Möglichkeit, die Entropie von G zu berechnen. Zunächst gilt dieser Satz nur für unendlich zyklische Gruppen, Conze [2, Satz 3.2] hat ihn jedoch auf den vorliegenden Fall erweitert. Sei nämlich für eine Zerlegung P die Beziehung $P_G = \epsilon$ erfüllt, man nennt dann P eine erzeugende Zerlegung, so besagt dieser Satz:

$$h(G) = \inf H(P)$$

wobei das Infimum über alle erzeugenden Zerlegungen aus $\mathcal{Z}$ genommen wird.

§ 2 Definition der Folgenentropie und erste Aussagen

Sei in diesem Paragraphen G stets eine abelsche Gruppe mit m fest vorgegebenen erzeugenden Automorphismen $T_1, \dots, T_m$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes. Wir wollen jetzt die von Kushnirenko [9] im Fall $m=1$ angegebene Definition erweitern. Dazu wählen wir eine beliebige Folge $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Z}^m$; wir haben also $A_n = (A_n^1, \dots, A_n^m)$. Für eine Zerlegung $P \in \mathcal{Z}$ können wir dann die Zerlegung bezüglich dieser Folge unter den Automorphismen $T_1, \dots, T_m$ bilden und deren mittlere Entropie berechnen:

2.1 Definition:

Sei G eine abelsche Gruppe von Automorphismen eines Wahrscheinlichkeitsraumes mit m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$. Ferner sei $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}^m$. Für jede Zerlegung $P \in \mathcal{Z}$ definieren wir:

$$h_A(P, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=1}^n T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P\right)$$

wobei $A_i = (A_i^1, \dots, A_i^m)$.

Die Folgenentropie von G sei definiert durch:

$$h_A(G) = \sup_{P \in \mathcal{Z}} h_A(P, G)$$

Aus obiger Definition kann man unmittelbar folgende Eigenschaft der Folgenentropie entnehmen:

Seien $P, Q \in \mathcal{Z}$ und $P \leq Q$, dann gilt:

$$h_A(P, G) \leq h_A(Q, G)$$

für alle Folgen A .

Wir müssen jedoch feststellen:

2.2 Bemerkung:

- Es ist nicht a priori klar, daß obige Definition von $h_A(G)$ von der Wahl der Erzeuger von G unabhängig ist. Wir werden dies jedoch im aperiodischen Fall für $h(G) > 0$ zeigen.
- Wegen der Bemerkung a) ist es also auch nicht a priori klar, daß die Folgenentropie $h_A(G)$ unabhängig vom zugrundeliegenden System $(X, \mathcal{E}, m, G)$ ist.
- Wir müssen weiter zeigen, daß der Begriff der Folgenentropie eine Verallgemeinerung des Entropiebegriffes darstellt, wie er bei Conze [3] eingeführt wird.

Wir werden jetzt zwei Aussagen, die von Kushnirenko [9] für $m=1$ bewiesen wurden, auf unseren Fall erweitern. Seien dazu die m erzeugenden Automorphismen $T_1, \dots, T_m$ fest gewählt.

2.3 Satz: Sei $d(P, Q) = H(P/Q) + H(Q/P)$ für $P, Q \in Z$ die übliche Entropiemetrik auf Z . Dann gilt:

$$|h_A(P, G) - h_A(Q, G)| < d(P, Q)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P \bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \\ &= \underbrace{H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P\right)}_{= \alpha} + \\ & \quad + H\left(\bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q / \underbrace{\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P}_{= \gamma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \alpha + H(T_1^{A_1^1} \dots T_m^{A_1^m} Q / \gamma) \\
 & \quad + H(T_1^{A_2^1} \dots T_m^{A_2^m} Q / \gamma) \\
 & \quad + \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad + H(T_1^{A_k^1} \dots T_m^{A_k^m} Q / \gamma) \\
 & \quad \quad \quad (\text{insgesamt } k \text{ Stück}) \\
 & \leq \alpha + H(T_1^{A_1^1} \dots T_m^{A_1^m} Q / T_1^{A_1^1} \dots T_m^{A_1^m} P) \\
 & \quad + \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad + H(T_1^{A_k^1} \dots T_m^{A_k^m} Q / T_1^{A_k^1} \dots T_m^{A_k^m} P) \\
 & = \alpha + k H(Q / P)
 \end{aligned}$$

Eine analoge Ungleichung gilt bei Vertauschung von P und Q.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 & |h_A(P, G) - h_A(Q, G)| \\
 & = \left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} Q\right) \right. \\
 & \quad \left. - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \right| \\
 & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left| H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P\right) \right. \\
 & \quad \left. - H\left(\bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \right| \\
 & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left| H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P \vee \bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \right. \\
 & \quad \left. - H\left(\bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q / \bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P\right) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P \vee \bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \\
 & + H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P / \bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \\
 & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(H\left(\bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q / \bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P\right) \right. \\
 & \quad \left. + H\left(\bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P / \bigvee_{j=1}^k T_1^{A_j^1} \dots T_m^{A_j^m} Q\right) \right) \\
 & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (k \cdot H(Q / P) + k \cdot H(P / Q)) \\
 & = d(P, Q) //
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man das mehrdimensionale Analogon des Lemmas von Kushnirenko beweisen. Es bietet eine Möglichkeit, die Folgenentropie zu berechnen, wenn man nur eine Folge von Zerlegungen hat, die gegen ε , die Zerlegung in die Punkte des Raumes, aufsteigt.

2.4 Lemma:

Sei P_k eine Folge von Zerlegungen in Z mit $P_k \leq P_{k+1}$ und $\bigvee_{i=1}^{\infty} P_i = \varepsilon$. Dann gilt:

$$h_A(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_A(P_k, G)$$

für jede Folge AcZ^m .

Beweis: Sei $P \in Z$ eine beliebige Zerlegung. Da $\bigvee_{k=1}^{\infty} P_k = \varepsilon$ folgt

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0: \quad \exists P'_n \text{ gröber als } P_n \text{ mit } d(P, P'_n) < \delta$$

Wegen Satz 3 gilt dann:

$$\begin{aligned}
 h_A(P, G) & \leq h_A(P'_n, G) + \delta \\
 & \leq h_A(P_n, G) + \delta \\
 & \leq \lim_k h_A(P_k, G) + \delta
 \end{aligned}$$

Da die letzte Aussage für alle $\delta > 0$ richtig ist, folgt die Behauptung. //

§ 3 Berechnung der Folgenentropie

Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß jede Folgenentropie einer aperiodischen Gruppe von Automorphismen mit m Erzeugern aus der Entropie dieser Gruppe durch Multiplikation mit einem Faktor zu berechnen ist, falls $h(G) > 0$. Dazu führen wir eine Konstante $K(A)$ ein, die nur von der gewählten Folge $A \in \mathbb{Z}^m$, nicht aber von der speziellen Gruppe abhängt. Sei dazu zunächst:

$$S_A(n, k) = \{(A_j^1 + r_1, \dots, A_j^m + r_m) / 1 \leq j \leq n, -k \leq r_i \leq k\}$$

und $s_A(n, k) = s(S_A(n, k)) = \text{Anzahl der Elemente in } S_A(n, k)$

Als gesuchte Konstante $K(A)$ wird sich schließlich erweisen:

$$K(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n, k)$$

Dabei stellen wir fest, daß der auftretende Limes (aufsteigend) existiert, da $s_A(n, k)$ monoton in k wächst.

3.1 Satz: Sei G eine abelsche aperiodische Gruppe von Automorphismen und $0 < h(G) < \infty$. Für jede Folge A in $\mathbb{Z}^m$ gilt:

$$h_A(G) \leq K(A) \cdot h(G)$$

Beweis: Wegen des Satzes von Rokhlin (Conze [2] Satz 3.2) gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{Z} \quad P \text{ erzeugende Zerlegung mit} \\ H(P) < h(G) + \epsilon$$

Sei nun zu gegebenem $\epsilon > 0$ P eine erzeugende Zerlegung mit obiger Eigenschaft und ferner

$$Q_k = \bigvee_{i_1 = -k}^k \dots \bigvee_{i_m = -k}^k T_1^{i_1} \dots T_m^{i_m} P$$

Aus Lemma 2.4 ergibt sich:

$$h_A(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_A(Q_k, G)$$

Andererseits

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=1}^n T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} Q_k\right) \\ = H\left(\bigvee_{i=1}^n \bigvee_{j_1=-k}^k \dots \bigvee_{j_m=-k}^k T_1^{A_i^1+j_1} \dots T_m^{A_i^m+j_m} P\right) \\ \leq s_A(n, k) \cdot H(P) \end{aligned}$$

$$\text{Also: } h_A(Q_k, G) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n, k) \cdot H(P)$$

$$h_A(G) \leq K(A) \cdot H(P) \leq K(A) \cdot (h(G) + \epsilon)$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ richtig ist, erhalten wir

$$h_A(G) \leq K(A) \cdot h(G)$$

//

Für $K(A) < \infty$ können wir auch im Fall $h(G) = 0$ eine entsprechende Aussage machen:

3.2 Korollar: Sei $h(G) = 0$ und $K(A) < \infty$
Dann gilt: $h_A(G) = 0$

Beweis: Sei $h(G) = 0$. Dann existiert, wie im obigen Satz, für alle $\epsilon > 0$ eine erzeugende Zerlegung $P \in Z$ mit $H(P) < \epsilon$.

Sei Q_k wie im Satz eingeführt. Dann zeigen wir wie dort:

$$h_A(G) \leq K(A) \cdot (h(G) + \epsilon) = K(A) \cdot \epsilon$$

Da nun $K(A) < \infty$ und $\epsilon > 0$ beliebig, folgt hieraus:

$$h_A(G) = 0$$

//

Wir werden eine weitere Abschätzung benötigen, die auf der Entropie der Zerlegung aufbaut. Man erhält sie auf dem gleichen Weg wie im Beweis des Satzes 3.1

3.3 Korollar: Sei $P \in \mathcal{Z}$. Dann gilt für jede Folge $A \in \mathcal{Z}^m$:

$$h_A(P, G) \leq K(A) \cdot H(P)$$

Beweis: Man zeigt wie in Satz 3.1:

$$H\left(\bigvee_{i=1}^n T_i^{A^1} \dots T_i^{A^m} P\right) \leq s_A(n, 0) \cdot H(P)$$

Daraus folgt:

$$h_A(P, G) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n, 0) \cdot H(P)$$

Da nun $s_A(n, k)$ isoton in k , folgt:

$$h_A(P, G) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n, k) H(P) = K(A) H(P)$$

//

Wir wollen jetzt zeigen, daß wir in der Aussage des Satzes 3.1 sogar Gleichheit erreichen können. Dazu müssen wir die Entropie einer Zerlegung P unter der Gruppe G als bedingte Entropie formulieren. Wir können uns dabei auf eine Formel stützen, die Conze [3, Satz 2.2] beweist. Da dort jedoch nur der Fall $m=2$ explizit angegeben ist, und die Verallgemeinerung nicht sofort klar ist, soll diese Formel noch für m beliebig hergeleitet werden.

3.4 Lemma: Sei $P \in \mathcal{Z}$ eine Zerlegung und G eine abelsche Gruppe von Automorphismen mit m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$. Dann gilt:

$$h(P, G) = H(P/P_G^-)$$

wobei $P_G^- = P_{T_1}^- v (P_{T_1})_{T_2}^- v \dots v (((P_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-1}})_{T_m}^-$

Zum Beweis des Lemmas benötigen wir zunächst einen Hilfssatz:

3.5 Hilfssatz: Sei G_k die von den Automorphismen $T_1, \dots, T_k$ aufgespannte Gruppe ($1 \leq k \leq m$). Dann gilt:

$$h(P, G_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h\left(\bigvee_{i=1}^n T_k^i P, G_{k-1}\right)$$

Beweis: Sei ρ eine endliche Teilmenge von Z^k . Wegen Lemma 1 bei Conze [3] gilt:

$$h(P, G_k) \leq \frac{1}{s(\rho)} H(P_\rho)$$

wobei $s(\rho)$ die Anzahl der Elemente in ρ und $P_\rho = \bigvee_{i \in \rho} T_1^{i_1} \dots T_k^{i_k} P$

Betrachte speziell die Quader

$$\rho_{n,r} = \{i \in Z^k / 0 \leq i_s \leq n-1 \text{ für } s=1, \dots, k-1, 0 \leq i_k \leq r-1\}$$

Für $n \rightarrow \infty$ bei festem r konvergiert die Folge

$$\frac{1}{s(\rho_{n,r})} H(P_{\rho_{n,r}}) \rightarrow \frac{1}{r} h\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} T_k^i P, G_{k-1}\right)$$

Folglich: $h(P, G_k) \leq \frac{1}{r} h\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} T_k^i P, G_{k-1}\right)$

für alle $r \in \mathbb{N}$

Also:

$$h(P, G_k) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} h\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} T_k^i P, G_{k-1}\right)$$

Andererseits gilt stets:

$$\frac{1}{s(\rho_{n,r})} H(P_{\rho_{n,r}}) \geq \frac{1}{s(\rho_{j,p})} H(P_{\rho_{j,p}})$$

für $j \geq n, p \geq r$

Daher:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s(\rho_{n,r})} H(P_{\rho_{n,r}}) &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{s(\rho_{j,p})} H(P_{\rho_{j,p}}) \\
 &= \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{p \cdot j^{k-1}} H\left(\bigvee_{i=1}^j \dots \bigvee_{i_{k-1}=1}^j T_1^i \dots T_{k-1}^{i_{k-1}} \left(\bigvee_{i=0}^{p-1} T_k^i P\right)\right) \\
 &= \frac{1}{p} h\left(\bigvee_{i=0}^{p-1} T_k^i P, G_{k-1}\right) \quad \text{für } p \geq r
 \end{aligned}$$

Und damit

$$\frac{1}{s(\rho_{n,r})} H(P_{\rho_{n,r}}) \geq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} h\left(\bigvee_{i=0}^{p-1} T_k^i P, G_{k-1}\right)$$

Wenn wir n und r gegen ∞ gehen lassen, erhalten wir dann:

$$h(P, G_k) \geq \limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} h\left(\bigvee_{i=0}^{p-1} T_k^i P, G_{k-1}\right)$$

Zusammen mit der bereits vorher gezeigten anderen Ungleichung erhalten wir die gewünschte Beziehung.

//

Beweis des Lemmas:

Wir brauchen den Satz nur für $m \geq 2$ zu beweisen, da für $m = 1$ die Behauptung genau die übliche Definition der Entropie eines Automorphismus darstellt.

Sei ferner G eine Gruppe mit m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$ und G' die von $T_1, \dots, T_{m-1}$ erzeugte Gruppe.

Nach Hilfssatz 3.5 gilt nun:

$$h(P, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right)$$

Zum Beweis der Behauptung berechnen wir daher mit Hilfe der Formel von Pinsker (Conze [3] Eigenschaft 7 von $h(P, G)$):

$$\begin{aligned}
 & h\left(\bigvee_{i=0}^n T_m^i P, G'\right) - h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right) \\
 &= h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P \vee T_m^n P, G'\right) - h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right) \\
 &= h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right) - h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right) \\
 &\quad + H(T_m^n P / (T_m^n P)_{G'}^-, \vee(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P)_{G'}) \\
 &= H(P/P_{G'}^-, \vee(T_m^{-1} P \vee \dots \vee T_m^{-n} P)_{G'}) \\
 &= H(P/P_{G'}^-, \vee(((T_m^{-1} P)_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-1}} \vee \dots \\
 &\quad \dots \vee(((T_m^{-n} P)_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-1}})) \\
 &\rightarrow H(P/P_{T_1}^- \vee (P_{T_1})_{T_2}^- \vee \dots \vee ((P_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-1}})_{T_m}^-) \\
 &\quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ da ja nach Definition}
 \end{aligned}$$

$$P_{G'}^- = P_{T_1}^- \vee (P_{T_1})_{T_2}^- \vee \dots \vee ((P_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-2}})_{T_{m-1}}^-$$

Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned}
 h(P, G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_m^i P, G'\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(h\left(\bigvee_{i=0}^j T_m^i P, G'\right) - h\left(\bigvee_{i=0}^{j-1} T_m^i P, G'\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n} h(P, G') \right\} \\
 &= H(P/P_G^-) \\
 &\quad //
 \end{aligned}$$

Aus dem Lemma 3.4 erhalten wir unmittelbar folgenden Satz:

3.6 Satz: Sei einer der erzeugenden Automorphismen, etwa T_m , von den anderen Erzeugern $T_1, \dots, T_{m-1}$ einer Gruppe G abhängig, das heißt:

$$T_m = T_1^{n_1} \dots T_{m-1}^{n_{m-1}}$$

für irgendwelche $n_1, \dots, n_{m-1} \in \mathbb{Z}$, so gilt $h(G) = 0$

Beweis:

Aus $T_m = T_1^{n_1} \dots T_{m-1}^{n_{m-1}}$ folgt:

$$T_m^j P \leq (P)_{G_{m-1}} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}$$

Also: $P_G \leq P_{G_{m-1}}$ und damit

$$h(P, G) = H(P/P_G^-) \leq H(P/P_{G_{m-1}}^-) = 0$$

//

Für den weiteren Gang der Überlegungen ist es nötig, aus endlichen Teilmengen des $\mathbb{Z}^m$ Elemente auszusuchen, die in gewisser Weise maximal sind.

Sei $M \subset \mathbb{Z}^m$ endlich. Wir bilden folgende Teilmenge:

$$M^m = \{i \in M / i^m = \max_{j \in M} j^m\}$$

Enthält M^m mehr als ein Element, so bilden wir hieraus wieder eine Teilmenge:

$$M^{m-1} = \{i \in M^m / i^{m-1} = \max_{j \in M^m} j^{m-1}\}$$

und so fort. Nach spätestens m Schritten, nämlich bei der Menge M^1 , bleibt genau ein Element i aus M zurück, denn sei j ein weiterer Punkt aus M^1 , dann gilt: $i^k = j^k$ für alle $1 \leq k \leq m$ und damit $i = j$.

Das so gewonnene Element $i \in M^1$ heiße im folgenden Lemma maximales Element von M .

3.7 Lemma: Sei McZ^m eine endliche Menge. Dann gilt:

$$H\left(\bigvee_{i \in M} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \geq s(M) \cdot h(P, G) \quad (P \in Z)$$

wobei $s(M)$ wieder die Anzahl der Elemente von M

Beweis: durch Induktion nach der Zahl der Elemente von M .

Sei $s(M) = 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i \in M} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) &= H(T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P) \\ &= H(P) \geq h(P, G) \end{aligned}$$

Induktionsschritt von $s(M) = n$ auf $s(M) = n+1$:

Sei also $s(M) = n+1$ und z das maximale Element von M , das wir wie oben angegeben bestimmt haben. Ferner $M' = M \setminus \{z\}$

1) Für $j \in M' \setminus M^m$ gilt:
 $j^m < z^m$

$$\text{also: } T_1^{j^1 - z^1} \dots T_m^{j^m - z^m} P \leq (((P_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{m-1}})_{T_m}^- \leq P_G^-$$

2) Sei $j \in M^k \setminus M^{k-1}$ für $1 < k \leq m$
 Dann ist $j^{k-1} < z^{k-1}$ und $j^1 = z^1$ für $k \leq l \leq m$ und damit

$$\begin{aligned} &T_1^{j^1 - z^1} \dots T_{k-1}^{j^{k-1} - z^{k-1}} T_k^{j^k - z^k} \dots T_m^{j^m - z^m} P \\ &= T_1^{j^1 - z^1} \dots T_{k-1}^{j^{k-1} - z^{k-1}} P \end{aligned}$$

$$\leq (((P_{T_1})_{T_2} \dots)_{T_{k-2}})_{T_{k-1}}^- \leq P_G^-$$

Da M^1 einpunktig gilt also für alle $j \in M'$:

$$T_1^{j^1-z^1} \dots T_m^{j^m-z^m} P \leq P_G^-$$

und daher:

$$\begin{aligned} & H\left(\bigvee_{i \in M} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \\ &= H\left(\bigvee_{i \in M'} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P \vee T_1^{z^1} \dots T_m^{z^m} P\right) \\ &= H\left(\bigvee_{i \in M'} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \\ &\quad + H(T_1^{z^1} \dots T_m^{z^m} P / \bigvee_{i \in M'} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P) \\ &\geq n \cdot h(P, G) + H(P / \bigvee_{i \in M'} T_1^{i^1-z^1} \dots T_m^{i^m-z^m} P) \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung.

Wegen obiger Ausführungen ist aber $T_1^{i^1-z^1} \dots T_m^{i^m-z^m} P \leq P_G^-$ für alle $i \in M'$ und damit

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i \in M} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) &\geq n \cdot h(P, G) + H(P / P_G^-) \\ &= (n+1) h(P, G) = s(M) \cdot h(P, G) \end{aligned}$$

wegen Lemma 3.4.

//

Mit diesem Lemma können wir nun die beabsichtigte Ungleichung nachweisen:

3.8 Satz: Sei $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}^m$ und G eine abelsche Gruppe mit m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$ und $h(G) < \infty$. Dann ist

$$h_A(G) \geq K(A) \cdot h(G)$$

Beweis: Sei $P \in \mathbb{Z}$ eine beliebige Zerlegung. Dann gilt wegen des Lemmas von Kushnirenko (Lemma 2.4):

$$h_A(G) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_A(Q_k, G)$$

$$\text{für } Q_k = \bigvee_{i_1 = -k}^k \dots \bigvee_{i_m = -k}^k T_1^{i_1} \dots T_m^{i_m}$$

Andererseits gilt wegen obigen Lemmas:

$$H\left(\bigvee_{i=1}^n T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} Q_k\right) \geq s_A(n, k) \cdot h(P, G)$$

Also:

$$\begin{aligned} h_A(G) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} h_A(Q_k, G) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=1}^n T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} Q_k\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n, k) h(P, G) \\ &= K(A) \cdot h(P, G) \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Supremum über alle $P \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$h_A(G) \geq K(A) \cdot h(G) \quad //$$

Definiert man $0 \cdot \infty = 0$, so kann man obigen Satz auch für $h(G) = \infty$ formulieren. Da sich im Falle $K(A) > 0$ dann, wie wir zeigen werden, $h_A(G) = \infty$ ergibt, kann man hier sogar Gleichheit beweisen:

3.9 Korollar: Sei $h(G) = \infty$, dann gilt

$$h_A(G) = K(A) \cdot h(G)$$

mit der Vereinbarung: $0 \cdot \infty = 0$

Beweis: Wegen Korollar 3.3 gilt

$$h_A(P, G) \leq K(A) \cdot h(P) \quad \text{für alle } P \in Z$$

Sei nun zunächst $K(A) = 0$, dann folgt hieraus $h_A(P, G) = 0$ für alle $P \in Z$ und daher $h_A(G) = \sup_{P \in Z} h_A(P, G) = 0$

Sei jetzt $K(A) > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Da $h(G) = \infty$ gibt es ein $P \in Z$ mit

$$h(P, G) > k$$

Sei wieder $Q_P = \bigvee_{i_1=-p}^p \dots \bigvee_{i_m=-p}^p T_1^{i_1} \dots T_m^{i_m} P$

Dann ist

$$h_A(G) \geq \lim_p h(Q_P, G) \geq K(A) h(P, G) \geq K(A) \cdot k$$

Da k beliebig war, folgt die Behauptung. //

Mit den Sätzen 3.1, 3.8 und 3.9 haben wir also die Beziehung

$$h_A(G) = K(A) \cdot h(G)$$

für aperiodische Gruppen mit m Erzeugern bewiesen, falls $h(G) > 0$ ist und $0 \cdot \infty = 0$ vereinbart wird. Dabei gilt die Beziehung

$$h_A(G) \geq K(A) \cdot h(G)$$

auch im nicht-aperiodischen Fall, wobei im Fall $h(G) = \infty$ auch hier noch Gleichheit gilt.

Damit können wir gestützt auf Conze [3] im aperiodischen Fall die Unabhängigkeit der Folgenentropie von den Erzeugern der Gruppe nachweisen (Conze hat ja gezeigt, daß $h(G)$ unabhängig von den Erzeugern ist.) Wir werden jedoch im nächsten Paragraphen umgekehrt aus obiger Beziehung auf die Unabhängigkeit der Entropie und der Folgenentropie von den Erzeugern von G schließen können (Man beachte dabei, daß beim bisherigen Beweisgang diese Unabhängigkeit niemals benutzt wurde.)

Man kann jetzt wegen der Allgemeinheit der Definition der Folgenentropie aus dieser auch zum Beispiel die Entropie oder Folgenentropie eines der erzeugenden Automorphismen T_i berechnen. Man muß sich jedoch im klaren sein, daß die Definition der Folgenentropie wie die der Entropie stets mit der Zahl der Erzeuger der Gruppe verknüpft ist. Wir können aus dieser Tatsache ein auch bei Conze [3 Satz 2.3] gezeigtes Resultat auf anderem Wege nachweisen:

3.10 Satz: Seien $T_1, \dots, T_m$ die Erzeuger der abelschen Gruppe G und sei etwa $h(T_i) < \infty$. Dann gilt: $h(G) = 0$

Beweis: Angenommen: $h(G) > 0$, dann wäre

$$h_A(G) \geq K(A) \cdot h(G) \text{ für alle Folgen } A.$$

Wähle die spezielle Folge

$$A_n = (0, \dots, 0, \underbrace{n}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0).$$

Dann gilt offenbar:

$$h_A(G) = h(T_i)$$

Andererseits gilt: $S_A(n,k) = \{(r_1, \dots, r_{i-1}, j+r_i, r_{i+1}, \dots, r_m)$
mit $1 \leq j \leq n, -k \leq r_p \leq k, 1 \leq p \leq m\}$

Damit: $s_A(n,k) \geq n \cdot k$

Also folgt: $K(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s_A(n,k) = \infty$

und damit $h(T_i) = h_A(G) = \infty$, was einen Widerspruch zur endlichen Entropie von T_i liefert.

//

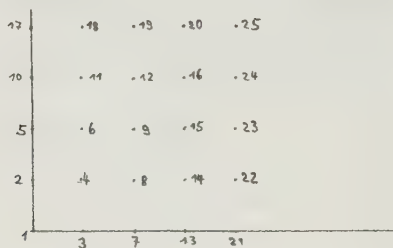
§ 4 Entropie und Folgenentropie

Wir wollen jetzt aus der im letzten Paragraphen gewonnenen Beziehung $h_A(G) \geq K(A) \cdot h(G)$ für abelsche Gruppen G mit $h(G) > 0$ die Unabhängigkeit der Definition sowohl der Entropie wie der Folgenentropie von dem speziellen Erzeugersystem der Gruppe nachweisen. (Dabei sind allerdings die erhaltenen Werte nicht von der Anzahl den erzeugenden Automorphismen unabhängig.) Wir werden dazu die Entropie etwas anders definieren müssen, werden aber auch deren Äquivalenz zur alten Definition nachweisen. Gleichzeitig erhalten wir auf diesem Weg die Einbettung der Entropie in die Definition der Folgenentropie. Als Vorbereitung dazu führen wir auf der Menge N^m ($N = \{0,1,\dots\}$) eine Spezielle Totalordnung N ein:

Sei

$$K_n = \{x \in N^m / 0 \leq x^i < n, 1 \leq i \leq m\}$$

der Kubus der Kantenlänge $(n-1)$ in N^m . Für zwei Punkte $x, y \in N^m$ gelte dann $x \prec_N y$, falls ein $n \in N$ existiert derart, daß $x \in K_n$, $y \notin K_n$. Falls ein solches n nicht existiert, gelte obige Beziehung, wenn x lexikographisch vor y liegt. Zur Veranschaulichung diene folgende Skizze in N^2



Wenn man also die Punkte von N^m gemäß obiger Ordnung N durchläuft, entstehen nach jeweils n^m Schritten genau die Kuben K_n .

Sei $N_k = \{x \in M^m / x \leq_N x_k, \text{ wobei } x_k \text{ das } k\text{-te Element bezüglich der Ordnung } N\}$

4.1 Definition: Sei $P \in Z$ eine Zerlegung, G eine abelsche Gruppe von Automorphismen mit den m Erzeugern $T_1, \dots, T_m$. Dann sei

$$\bar{h}(P, G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right)$$

und

$$\bar{h}(G) = \sup_{P \in Z} h(P, G)$$

Wir müssen nun zeigen, daß diese Definition der Entropie die gleichen Werte liefert wie die von Conze angegebene, zunächst aber, daß der Limes überhaupt existiert.

4.2 Satz: Die Werte von $\bar{h}(P, G)$ bzw. $\bar{h}(G)$ stimmen mit $h(P, G)$ bzw. $h(G)$ überein und der Limes existiert.

Beweis: Da wegen der speziellen Definition der Ordnungsrelation N stets $N_{n^m} = K_n$ gilt, folgt

$$\frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in N_{n^m}} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) = \frac{1}{s(K_n)} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right)$$

Wenn wir also die Entropie nach der alten Definition berechnen, so bilden wir den Limes über eine Teilfolge der neuen Definition. Wir brauchen daher nur die Existenz des Limes der neuen Folge zu beweisen und erhalten dann sofort die Gleichheit der Werte.

Existenz des Limes:

Sei $k \in \mathbb{N}$, und $n = n(k)$ derart, daß

$$K_n \subset N_k \subset K_{n+1} \text{ und } P \in Z$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \\ & \leq \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) + \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k \setminus K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \\ & \leq \frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) + \frac{1}{k} s(N_k \setminus K_n) \cdot H(P) \end{aligned}$$

Da $K_n \subset N_k \subset K_{n+1}$, folgt $s(N_k) = k \leq (n+1)^m$, $s(K_n) = n^m$ und daher

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} s(N_k \setminus K_n) \cdot H(P) \\ & \leq \frac{1}{k} ((n+1)^m - n^m) H(P) \leq \left(\frac{1}{n^m} ((n+1)^m - n^m)\right) H(P) \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck gegen 0 strebt gilt also:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0$$

$$\frac{1}{n^m} ((n+1)^m - n^m) H(P) < \varepsilon$$

und somit

$$\frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \leq \frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) + \varepsilon$$

für alle $k > (n_0+1)^m$

Analog zeigt man:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n'_0 \quad \forall n > n'_0$$

$$\frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) \geq \frac{1}{(n+1)^m} H\left(\bigvee_{i \in K_{n+1}} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) - \varepsilon$$

für $K_n \subset N_k \subset K_{n+1}$

Conze [2 Satz 2.1] zeigt nun, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right)$$

existiert, also:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n' \forall n > n'$$

$$\left| \frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) - h(P, G) \right| < \epsilon$$

Sei $\bar{n} = \max(n_0, n'_0, n')$, $k > (\bar{n}+1)^m$
und $K_n \not\subseteq N_k \subseteq K_{n+1}$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) &\leq \frac{1}{n^m} H\left(\bigvee_{i \in K_n} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) + \epsilon \\ &< h(P, G) + 2\epsilon \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) &\geq \frac{1}{(n+1)^m} H\left(\bigvee_{i \in K_{n+1}} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} P\right) - \epsilon \\ &> h(P, G) - 2\epsilon \end{aligned}$$

Da obige Aussagen für alle $\epsilon > 0$ erfüllt werden können, existiert der Limes.

//

Etwas weniger bequem kann man obigen Satz auch bezüglich anderer Ordnungen des $\mathbb{M}^m$ beweisen. Eine etwas "natürlichere" Ordnung, für die dies zum Beispiel möglich ist, wäre folgende: Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^m$. Für $x, y \in \mathbb{M}^m$ gelte $x < y$, falls $\|x\| < \|y\|$, oder

$||x|| = ||y||$ und x lexikographisch vor y . Man könnte die Entropie auch bezüglich dieser Ordnung definieren und erhielte die gleichen Werte.

Nun wollen wir noch die Unabhängigkeit der Entropie vom Erzeugendensystem beweisen.

- 4.3 Definition: Eine Gruppe G heiße nicht-periodisch, falls
 $m\{x/g^n x = x\} < 1$ für alle $g \in G, n \in \mathbb{Z}$.
 Ein Erzeugendensystem $T_1, \dots, T_m$ der Gruppe G heiße periodisch, falls

$$m\{x/T_1^{i^1}, \dots, T_m^{i^m} x = x\} = 1$$

für ein $i = (i^1, \dots, i^m) \in \mathbb{Z}^m$

Falls ein solches i nicht existiert, heiße das Erzeugendensystem nicht-periodisch.

Wir schreiben im folgenden $h(T_1, \dots, T_m)$, falls wir die gemäß Definition 4.1 gebildete Entropie der Gruppe G bezüglich des Erzeugendensystems $T_1, \dots, T_m$ meinen.

- 4.4 Lemma: Sei $S_1, \dots, S_m$ ein periodisches Erzeugendensystem von G und $T_1, \dots, T_m$ ein nicht-periodisches. Dann gilt:

$$0 = h(S_1, \dots, S_m) = h(T_1, \dots, T_m)$$

Beweis: Zunächst gilt wegen Satz 2.1 bei Conze [3] :

$$h(S_1, \dots, S_m) = 0$$

Daher also: $h(T_1, \dots, T_m) \geq h(S_1, \dots, S_m)$

Im folgenden schreiben wir die von $T_1, \dots, T_m$ bzw. $S_1, \dots, S_m$ aufge-

spannte Gruppe additiv, das heißt:

$$T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} \cong i^1 \cdot T_1 + \dots + i^m \cdot T_m \quad i \in \mathbb{Z}^m$$

(entsprechend für S)

Da nun $S_1, \dots, S_m$ und $T_1, \dots, T_m$ Erzeuger von G sind, gilt:

$$S_r = \bar{J}_r^1 T_1 + \dots + \bar{J}_r^m T_m \quad \bar{J}_r = (\bar{J}_r^1 \dots \bar{J}_r^m) \in \mathbb{Z}^m$$

analog

$$T_s = j_s^1 S_1 + \dots + j_s^m S_m \quad j_s \in \mathbb{Z}^m$$

Wir können also die Matrix $\bar{B} = (\bar{J}_r^i)$ bilden und erhalten damit:

$$(S_1, \dots, S_m) = (T_1, \dots, T_m) \bar{B}$$

ebenso:

$$(T_1, \dots, T_m) = (S_1, \dots, S_m) B \quad \text{für } B = (j_i^k)$$

$$\begin{aligned} \text{also } (T_1, \dots, T_m) &= (S_1, \dots, S_m) B \\ &= (T_1, \dots, T_m) (\bar{B} B) \end{aligned}$$

Zunächst ist diese Operation durchführbar, da die Matrix $A = \bar{B} B$ als Produkt zweier ganzzahliger Matrizen wieder ganzzahlig ist.

Somit $T_p = \sum_{q=1}^m a_p^q T_q$ falls (a_p) die p-te Spalte der Matrix A

$$\text{also } T_p = a_p^1 T_1 + \dots + a_p^p T_p + \dots + a_p^m T_m$$

und $I = a_p^1 T_1 + \dots + (a_p^p - 1) T_p + \dots + a_p^m T_m$ wobei I die Identität.

Da nun $T_1, \dots, T_m$ als nicht periodisch vorausgesetzt war, folgt

hieraus

$$a_p^1 = \dots = a_p^{p-1} = 0, a_p^p = 1, a_p^{p+1} = a_p^m = 0$$

Wir sehen hieraus, daß A die Einheitsmatrix ist, also (j_i^k) invertierbar und somit nicht-singulär.

Das Gleichungssystem

$$\sum_{p=1}^m j_p^s i^p = 0 \quad 1 \leq s \leq m$$

hat also nur die Lösung $i = (0, \dots, 0)$

Wir kehren jetzt zur Produktschreibweise der Gruppe zurück.

Sei wieder N die zu Anfang des Paragraphen eingeführte Ordnung in M^m und N_k die ersten k Glieder bezüglich dieser Ordnung, dann gilt:

$$\bigvee_{i \in N_k} T_1^{i^1} \dots T_m^{i^m} p = \bigvee_{i=1}^k S_1^{A_i^1} \dots S_m^{A_i^m} p$$

wobei

$$A_q^s = \sum_{p=1}^m j_p^s i^p \quad 1 \leq s \leq m$$

wenn q bezüglich N die Nummer des Punktes $i = (i^1, \dots, i^m)$

Behauptung: $A_q \neq A_r$ für $q \neq r$, falls

$$A_q = (A_q^1, \dots, A_q^m) \text{ und } A_r = (A_r^1, \dots, A_r^m)$$

wie oben definiert.

Beweis:

Angenommen $A_q = A_r$ für $q \neq r$

Sei $i = (i^1, \dots, i^m) \in N_q \setminus N_{q-1}$ und

$$k = (k^1, \dots, k^m) \in N_r \setminus N_{r-1}$$

Dann folgt hieraus:

$$\sum_{p=1}^m j_p^s i^p = A_q^s = A_r^s = \sum_{p=1}^m j_p^s i^p \quad 1 \leq s \leq m$$

$$\text{Also } \sum_{p=1}^m j_p^s (i^p - k^p) = 0 \quad 1 \leq s \leq m$$

Da nun nach obigem die Matrix (j_p^s) nicht-singulär ist, folgt hieraus:

$$i^p - k^p = 0 \text{ für } 1 \leq p \leq m$$

und damit $i = k$, also $q = r$, und wir erhalten daraus einen Widerspruch.

//

Mit dieser Behauptung erhalten wir dann:

$$s_A(k, 0) = s(\{A_i / 1 \leq i \leq k\}) = k$$

falls $A = (A_q)_{q \in \mathbb{N}}$

Da nun $s_A(k, i)$ isoton in i ist, folgt daher

$$K(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} s_A(k, n) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{k} s_A(k, 0) = 1$$

Also $K(A) \geq 1$

Wegen der Beziehung

$$\bigvee_{i \in N_k} S_1^{i^1} \dots S_m^{i^m} P = \bigvee_{i=1}^k T_1^{A_i^1} \dots T_m^{A_i^m} P$$

gilt offensichtlich

$$h(S_1, \dots, S_m) = h_A(T_1, \dots, T_m)$$

Nehmen wir nun an, $h(T_1, \dots, T_m) > 0$, dann können wir Satz 3.8 bzw. Korollar 3.9 anwenden und erhalten mit

$$\begin{aligned} 0 &= h(S_1, \dots, S_m) = h_A(T_1, \dots, T_m) \\ &\geq K(A)h(T_1, \dots, T_m) \geq h(T_1, \dots, T_m) > 0 \end{aligned}$$

einen Widerspruch.

Damit ist das Lemma bewiesen.

//

4.5 Satz: Sei G eine nicht-periodische Gruppe von Automorphismen mit m Erzeugern. Dann ist der Wert $h(G)$ unabhängig vom Erzeugersystem.

Beweis: Da G abelsch und endlich erzeugt ist, gibt es wegen des Hauptsatzes für abelsche Gruppen eine Basis. Diese Basis ist dann ebenfalls nicht-periodisch. (siehe etwa Baumgartner [2, Satz 103], Kurosh [8])

Sei k die Anzahl der Basiselemente $T_1, \dots, T_k$ und zunächst $m > k$. Dann ist $T_1, \dots, T_k, \underbrace{I, \dots, I}_{m-k\text{-mal}}$ ebenfalls Erzeugendensystem von G und

periodisch. Damit $h(T_1, \dots, T_k, I, \dots, I) = 0$ wegen Conze [2, Satz 2.1]

und daher nach Lemma 4.4 auch für jedes andere Erzeugendensystem $S_1, \dots, S_m$ von G :

$$h(S_1, \dots, S_m) = 0, \text{ also } h(G) = 0$$

Als nächstes sei $m = k$ und zunächst für die Basis $T_1, \dots, T_m$:
 $h(T_1, \dots, T_m) > 0$.

Sei ferner $S_1, \dots, S_m$ ein weiteres Erzeugendensystem. Dann ist auch $S_1, \dots, S_m$ nicht-periodisch, denn andernfalls würden wir aus dem Lemma 4.4 $h(T_1, \dots, T_m) = 0$ folgern, im Widerspruch zu obiger Annahme.

Wir bilden daher wieder eine Folge A derart, daß

$$T_1^{p_1} \dots T_m^{p_m} = S_1^{A_1^1} \dots S_m^{A_m^1}$$

falls $p \in N_i \setminus N_{i-1}$

Wegen der Nicht-Periodizität von $(T_1, \dots, T_m)$ erhalten wir wieder $K(A) \geq 1$, denn aus $A_i = A_k$ folgt

$$\begin{aligned} T_1^{p_1} \dots T_m^{p_m} &= S_1^{A_i^1} \dots S_m^{A_i^m} = S_1^{A_k^1} \dots S_m^{A_k^m} \\ &= T_1^{q_1} \dots T_m^{q_m} \end{aligned}$$

für $q \in N_k \setminus N_{k-1}$, damit $i = k$
 und wie im Lemma dann $K(A) \geq 1$

Also gilt dann:

$$\begin{aligned} h(T_1, \dots, T_m) &= h_A(S_1, \dots, S_m) \\ &\geq K(A) h(S_1, \dots, S_m) \geq h(S_1, \dots, S_m) \end{aligned}$$

Da nur die Nicht-Periodizität von $(T_1, \dots, T_m)$ verwendet wurde, können wir die gleichen Schlüsse nach Vertauschung von $(T_1, \dots, T_m)$ und $(S_1, \dots, S_m)$ durchführen und erhalten die Gleichheit:

$$h(T_1, \dots, T_m) = h(S_1, \dots, S_m)$$

Als letztes sei schließlich für die Basis $T_1, \dots, T_m$:

$$h(T_1, \dots, T_m) = 0$$

Angenommen es gäbe einen Erzeuger $S_1, \dots, S_m$ mit $h(S_1, \dots, S_m) > 0$. (Damit speziell $S_1, \dots, S_m$ nicht-periodisch) Dann würden wir von diesem Erzeuger ausgehend wieder wie oben zeigen können:

$$0 = h(T_1, \dots, T_m) \geq h(S_1, \dots, S_m) > 0$$

und damit einen Widerspruch erhalten.

//

4.6 Bemerkung: a) Durch obigen Satz haben wir also die Unabhängigkeit der Entropie nicht-periodischer Gruppen vom speziellen Erzeugersystem gezeigt. Gleichzeitig erhielten wir mit der Beziehung

$$h_A(G) = K(A) h(G)$$

für $h(G) > 0$ die Unabhängigkeit der Folgenentropie im aperiodischen Fall.

b) Das Lemma 4.4 liefert gleichzeitig die Aussage, daß man sofort die Entropie 0 erhält, wenn man nicht ein minimales Erzeugendensystem wählt.

4.7 Korollar:

Sei G eine beliebige abelsche Gruppe von Automorphismen mit m Erzeugern. Dann ist der Wert $h(G)$ unabhängig vom Erzeugersystem.

Beweis: Wegen des Satzes 4.5 brauchen wir die Behauptung nur noch für Gruppen mit periodischen Elementen nachzuweisen. Solche Gruppen haben aber "Basen" die periodisch sind. (Siehe etwa Kurosh [8]) Wegen des Lemmas 4.4 erhalten wir aber dann sofort $h(T_1, \dots, T_m) = 0$ für alle Erzeuger $T_1, \dots, T_m$ und damit die Unabhängigkeit der Entropie $h(G)$ vom Erzeugersystem.

Literaturverzeichnis

- [1] Billingsley Ergodic Theory and Information
Wiley, New York 1965
- [2] Baumgartner Gruppentheorie
de Gruyter, Berlin 1964
- [3] Conze Entropie d'un groupe abelien de trans-
formations
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits-
theorie 25, Nr. 1, S. 11-30 (1972)
- [4] Halmos Lectures on Ergodic Theory
Chelsea, New York 1956
- [5] Jacobs Lecture Notes on Ergodic Theory
University of Aarhus 1962/63
- [6] Katznelson Ergodic Automorphismus of T^n
are Bernoulli Shifts
Israel Journal of Mathematics
Nr. 10 (1971), S. 186-195
- [7] Krug-Newton On Sequence Entropy of Automorphismus
of a Lebesgue Space
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheo-
rie 24, Nr. 3. S. 211-214 (1972)
- [8] Kurosh Theory of Groups
Chelsea, New York, 1960
- [9] Kushnirenko On Metric Invariants of Entropy
Type
Uspehi Mat.Nauk. 22 (1967) 5, 57-65
- [10] McCabe-Shields A Class of Markov Shifts which are
Bernoulli Shifts
Advances in Math. 6 (1971) 3, 323-328

- [11] Newton On Sequence Entropy I, II
Math. Systems Theory 4 (1970) 119-128
- [12] Ornstein Bernoulli Shifts with the same
Entropy are Isomorphic
Advances in Math. 4 (1970) 3, 337-352
- [13] Ornstein A Kolmogorov-Automorphism which is
not a Bernoulli Shift
Advances in Math.
- [14] Parry Entropy and Generators in Ergodic
Theory
Benjamin, New York 1968
- [15] Rochlin Lectures on Entropy Theory of Trans-
formations with Invariant Measure
Uspehi Mat. Nauk 22(1967) 5, 3-56
- [16] Smorodinsky Ergodic Theory, Entropy
Lecture Notes in Mathematics
Springer, Berlin 1971

L e b e n s l a u f

Am 12. März 1947 wurde ich, Eugen Krug, als Sohn des Zahnarztes Dr. Nikolaus Krug und seiner Ehefrau Friederike, geb. Kreuzer, in Nürnberg geboren.

Seit September 1953 besuchte ich die Volksschule und das Willstättergymnasium meiner Vaterstadt, wo ich im Juli 1966 das Reifezeugnis erhielt.

Hierauf begann ich im Wintersemester 1966/67 das Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Im Februar 1969 legte ich dort das Vordiplom, im Mai 1972 das Hauptdiplom in Mathematik ab.

Seit Juni 1972 bin ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für Statistik und mathematische Wirtschaftstheorie der Universität Karlsruhe beschäftigt.

März 1973

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990